Лекція № 7

2.2. Релятивістський рівноприскорений рух

Нагадаємо, що тривимірне прискорення в разі релятивістського руху не є інваріантом перетворень Лоренца, воно є різним в різних системах відліку: $\dot{\vec{v}} \neq \dot{\vec{v}}'$.

Рівноприскорений рух в релятивістській механіці – це рух зі сталим прискоренням у власній системі відліку, в якій $\vec{v}' = 0, \vec{a} = \text{const}$. З (2.12) отримали зв'язок між швидкістю та прискоренням в системі відліку, ще частинка рухається та сталим прискоренням у власній системі відліку (ф-ла (2.13))

$$\gamma^4 \left[\dot{\vec{v}}^2 + \frac{\gamma^2}{c^2} \left(\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} \right)^2 \right] = a^2.$$

Розглянемо рух уздовж осі x за умови, що в початковий момент часу релятивістська частинка знаходилась у початку координат та мала нульову швидкість:

$$\vec{v} \parallel \dot{\vec{v}} \parallel Ox; \quad \vec{r}(0) = 0, \vec{v}(0) = 0.$$

$$\gamma^4 \left[\dot{\vec{v}}^2 + \frac{\gamma^2}{c^2} \left(\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} \right)^2 \right] = \gamma^4 \left(\dot{v}_x^2 + \frac{\gamma^2}{c^2} v_x^2 \dot{v}_x^2 \right) = \gamma^4 \dot{v}_x^2 \left(1 + \frac{v_x^2}{c^2} \frac{1}{1 - \frac{v_x^2}{c^2}} \right) =$$

$$= \gamma^4 \frac{\dot{v}_x^2}{1 - \frac{v_x^2}{c^2}} = \gamma^6 \dot{v}_x^2 = \frac{\dot{v}_x^2}{\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2} \right)^3} = a^2.$$

$$\frac{dv_x}{dt} \frac{1}{\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2} \right)^{3/2}} = a.$$

Зручно переписати останню формулу так:

$$\frac{d}{dt} \frac{v_x}{\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2} \right)^{1/2}} = a. \tag{2.14}$$

Перевіряємо це:

$$\frac{d}{dt}\frac{\upsilon_x}{\left(1-\frac{\upsilon_x^2}{c^2}\right)^{1/2}}=\frac{\dot{\upsilon}_x}{\left(1-\frac{\upsilon_x^2}{c^2}\right)^{1/2}}+\frac{1}{\cancel{2}c^2}\frac{\cancel{2}\upsilon_x^2\dot{\upsilon}_x}{\left(1-\frac{\upsilon_x^2}{c^2}\right)^{3/2}}=$$

$$\frac{\dot{\upsilon}_x}{\left(1-\frac{\upsilon_x^2}{c^2}\right)^{3/2}}\left(1-\cancel{\frac{\upsilon_x^2}{c^2}}+\cancel{\frac{\upsilon_x^2}{c^2}}\right)=\frac{\dot{\upsilon}_x}{\left(1-\frac{\upsilon_x^2}{c^2}\right)^{3/2}}.$$

З (2.14) із урахуванням початкової умови для швидкості $\upsilon_x(0)=0$ знаходимо

$$\frac{\upsilon_x}{\left(1-\frac{\upsilon_x^2}{c^2}\right)^{1/2}}=at.$$

$$\upsilon_x^2=a^2t^2\left(1-\frac{\upsilon_x^2}{c^2}\right);\quad \upsilon_x^2\left(1+\frac{a^2t^2}{c^2}\right)=a^2t^2;\ \upsilon_x^2=\frac{a^2t^2}{1+\frac{a^2t^2}{c^2}};\quad \upsilon_x=\frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}}.$$

Закон зміни швидкості при рівноприскореному русі, якщо початкова швидкість дорівнювала 0, є таким:

$$\upsilon_x(t)=\frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}}. \tag{2.15}$$

Який рух можна назвати «нерелятивістським»? Нам не важливо, наскільки великим є прискорення. Важливо, щоб можна було відкинути доданок $\left(at/c\right)^2$ в знаменнику (2.15), тобто треба, щоб виконувалась умова $\left(at/c\right)^2\ll 1$. **Нерелятивістський** граничний випадок

$$\upsilon_x(t)=\frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}}\approx at.$$

Отримали формулу рівноприскореного руху з класичної механіки.

Інший граничний випадок $\left(at/c\right)^2\gg 1$, коли в знаменнику можна знехтувати одиницею. Знов, не важливо, наскільки малим є прискорення. Зі збільшенням часу руху, нерівність почне виконуватись. рух буде наближатися до рівномірного руху зі швидкістю світла. Такий граничний випадок називається **ультрарелятивістським**

$$\upsilon_x(t) \to c$$

Закон руху легко знаходимо з (2.15)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}};$$

$$dx = \frac{atdt}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}}; \quad dx = \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{a}\right)\frac{d\left(\frac{a^2t^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}} = \left(\frac{c^2}{a}\right)d\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}\right).$$

Маємо після інтегрування

$$x(t) = \left(\frac{c^2}{a}\right)\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}\right) + A;$$

$$x(0) = \left(\frac{c^2}{a}\right) + A = 0; \quad A = -\left(\frac{c^2}{a}\right).$$

З урахуванням початкової умови $x(0)=0$ отримуємо закон рівноприскореного руху

$$x(t) = \left(\frac{c^2}{a}\right)\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right). \tag{2.16}$$

Два граничні випадки – нерелятивістський та ультрарелятивістський дають такі формули:

$$\frac{a^2t^2}{c^2} \ll 1; \quad x(t) \approx \left(\frac{c^2}{a}\right)\left(\cancel{1} + \frac{1}{2}\frac{a^2t^2}{c^2} - \cancel{1}\right); \quad x(t) \approx \frac{at^2}{2};$$

$$\frac{a^2t^2}{c^2} \gg 1; \quad x(t) \approx \left(\frac{c^2}{a}\right)\left(\sqrt{\cancel{1} + \frac{a^2t^2}{c^2}} - \cancel{1}\right); \quad x(t) \to ct.$$

відповідно.

На двох рисунках нижче побудовані закон зміни швидкості та закон руху при релятивістському рівноприскореному русі та відповідні залежності для граничних випадків

Нерелятивістський рух

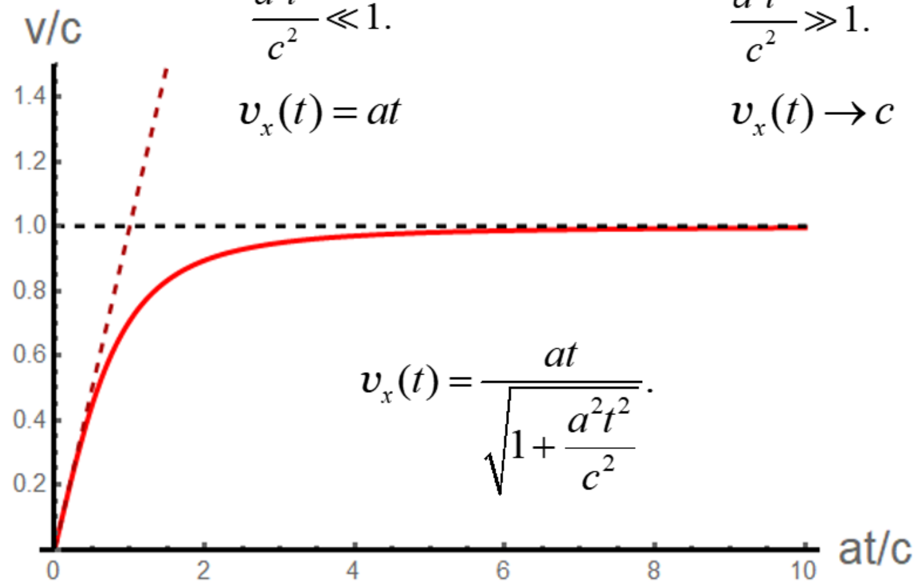
$$\frac{a^2t^2}{c^2} \ll 1.$$

$$\upsilon_x(t) = at$$

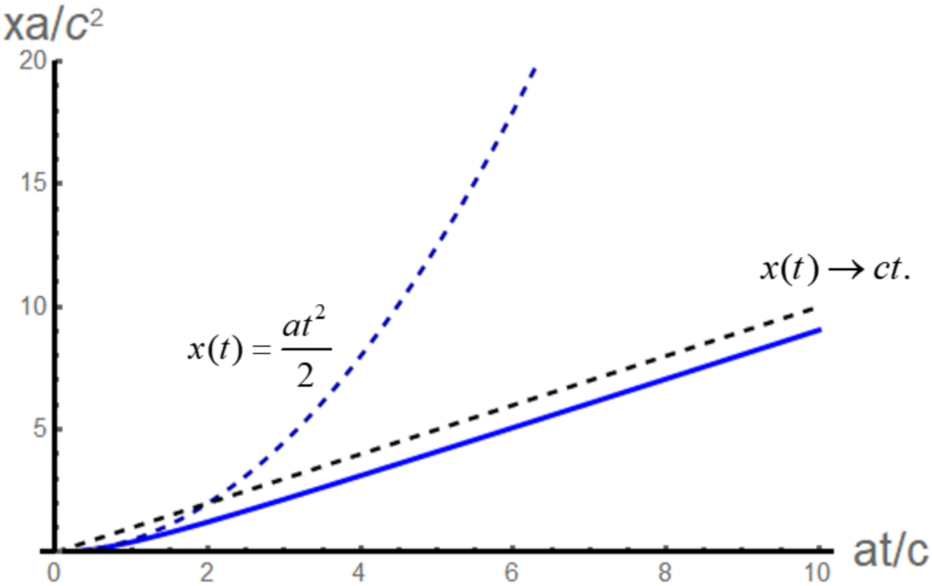
Ультрарелятивістський рух

$$\frac{a^2t^2}{c^2} \gg 1.$$

$$\upsilon_x(t) \to c$$



$$\upsilon_x(t) = \frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}}.$$



$$x(t) \to ct.$$

$$x(t) = \frac{at^2}{2}$$

$$x(t) = \left(\frac{c^2}{a}\right)\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}-1\right).$$

Розглянули кінематику релятивістської частинки – ввели в 4-просторі чотиривимірні вектори $x^i, u^i = \dfrac{dx^i}{ds}, w^i = \dfrac{du^i}{ds}$ (радіус-вектор, швидкість та прискорення). Вивчили релятивістський рівноприскорений рух. Тепер перейдемо до визначення динамічних величин в релятивістській механіці – імпульсу, функції Лагранжа, енергії.

3. РЕЛЯТИВІСТСЬКА ДИНАМІКА

Механіку релятивістської частинки зручно будувати за допомогою принципу найменшої дії.

3.1. Принцип найменшої дії

Для будь-якої механічної системи існує такий інтеграл S (інтеграл дії), який для дійсного руху має мінімум і варіація якого $\delta S = 0$.

Рівняння Лагранжа отримаємо так. Функцію дії побудуємо, як функціонал

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt; \tag{3.1}$$

$L(q, \dot{q}, t)$ – функція Лагранжа. Для спрощення розглядаємо тільки одну узагальнену координату q.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}(\delta q) \right) dt =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)\delta q dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q \Bigg|_{t_1}^{t_2}; \tag{3.2}$$

Якщо в (3.2) покласти $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, тобто допустити, що всі траєкторії, що варіюються, починаються та закінчуються в фіксованих точках у фіксовані моменти часу, то дійсній траєкторії відповідає функція Лагранжа, яка є розв’язком рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}. \tag{3.3}$$

Тут $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ – узагальнений імпульс, $F = \dfrac{\partial L}{\partial q}$ – узагальнена сила.

Нагадаємо ще формулу для енергії

$$\varepsilon = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \qquad (3.4)$$

Якщо допустити, що в (3.2) розглядаються тільки дійсні траєкторії, які задовольняють (3.3) та починаються в фіксований момент часу в фіксованій точці $\delta q(t_1) = 0$ та закінчуються в момент часу t_2 в різних точках $\delta q(t_2) \neq 0$, то з (3.2) та (3.3) маємо

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q(t_2).$$

Для багатьох ступенів свободи

$$\delta S = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i.$$

Узагальнені імпульси пов'язані з функцією дії

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}. \qquad (3.5)$$

Якщо дійсні траєкторії закінчуються в довільний момент часу, але в певній точці, то варіація функції дії дозволить знайти похідну $\frac{\partial S}{\partial t}$. Або відшукаємо повну похідну $\frac{dS}{dt}$:

$$\frac{dS}{dt} = L = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i; \quad \frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i = -H$$

Функція дії

$$S = \int \left(\sum_i p_i dq_i - H dt \right). \qquad (3.6)$$

Побудуємо інтеграл дії для вільної релятивістської частинки. Цей інтеграл повинен бути інваріантом перетворень Лоренца, тобто інтегралом від 4-скаляру. У випадку $\upsilon/c \ll 1$ він повинен перетворитися в класичний інтеграл дії для вільної частинки.

3.2. Функція Лагранжа релятивістської вільної частинки

В нерелятивістській механіці $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$. За аналогією з класичною механікою визначимо 4-імпульс, як

$$p^i = mcu^i. \tag{3.7}$$

Перевіримо це ствердження, побудувавши інтеграл дії для вільної частинки.

Інтеграл дії повинен бути релятивістським інваріантом. Єдиним інваріантом для побудови інтегралу дії є інтервал. Припустимо, що цей інтеграл має вигляд

$$S = \alpha \int ds = \alpha c \int \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} dt = \int L dt;$$

$$L = \alpha c \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}.$$

Визначимо коефіцієнт α релятивістської функції Лагранжа вільної частинки. В граничному випадку $\upsilon/c \ll 1$ нам відомий вигляд функції Лагранжа вільної частинки

$$L_{кл.} = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Саме до цієї границі повинна йти релятивістська функція, якщо $\upsilon/c \ll 1$. Функція Лагранжа визначається з точністю до повної похідної від функції координат, швидкостей та часу. Маємо

$$L = \alpha c \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} \approx \alpha c \left(1 - \frac{\upsilon^2}{2c^2}\right) = \frac{m\upsilon^2}{2} + const;$$

$$\alpha = -mc; \quad const = -mc^2;$$

Релятивістська функція Лагранжа вільної частинки має вигляд

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}. \tag{3.8}$$

Функція дії

$$S = -mc \int ds = -mc^2 \int \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} dt. \tag{3.9}$$

Релятивістський тривимірний імпульс визначимо за допомогою загальної формули

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

В декартових координатах

$$\vec{p}=\frac{\partial L}{\partial \vec{\upsilon}}=\nabla_{\vec{\upsilon}}L=-mc^2\frac{\partial}{\partial \vec{\upsilon}}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}=\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Тривимірний імпульс релятивістської частинки

$$\vec{p}=\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \tag{3.10}$$

Енергію знайдемо за допомогою формули (3.4), записаної в декартових координатах як

$$\varepsilon=\vec{p}\vec{\upsilon}-L=\frac{m\upsilon^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}+mc^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Енергія вільної частинки

$$\varepsilon=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \tag{3.11}$$

Важливою особливістю релятивістської формули (3.11) для енергії є те, що енергія вільної частинки завжди додатна. Це ствердження стосується будь-якої замкненої системи. Якщо частинка знаходиться у стані спокою $\vec{\upsilon}=0$ її енергія дорівнює енергії спокою

$$\varepsilon_0=mc^2. \tag{3.12}$$

Наявність енергії спокою проявляється у ядерних реакціях. при перетвореннях речовин та елементарних частинок. Формула (3.12) встановлює зв'язок між внутрішньою енергією та масою спокою. Маса спокою є мірою внутрішньої енергії. Виміряти ми можемо тільки зміну енергії спокою. Зі зростанням температури буде зростати й маса спокою. В нерелятивістських процесах ця зміна маси настільки мала, що її не можуть зафіксувати сучасні прилади.

Наприклад, якщо нагріти 1 кг води від 0 до 100 градусів Цельсія зміна маси $\Delta m=\Delta\varepsilon/c^2$ буде приблизно $5\cdot10^{-12}$кг. Такою малою величиною нехтуємо та вважаємо масу сталою величиною. При **вивченні хімічних реакцій, в нерелятивістській механіці закон збереження маси розглядають як закон природи.**

Між швидкістю, імпульсом та енергією релятивістської частинки існують важливі співвідношення

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \cdot \frac{c^2}{c^2} = \underbrace{\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}}_{\varepsilon} \cdot \frac{\vec{\upsilon}}{c^2} = \frac{\varepsilon\vec{\upsilon}}{c^2}.$$

Таким чином:

$$\vec{p} = \frac{\varepsilon\vec{\upsilon}}{c^2}; \quad \vec{\upsilon} = \frac{c^2\vec{p}}{\varepsilon}. \tag{3.13}$$

В граничному випадку малих швидкостей

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \approx m\vec{\upsilon}; \quad \varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \approx mc^2\left(1+\frac{\upsilon^2}{2c^2}\right) = mc^2 + \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

отримаємо формули класичної механіки. Ще раз нагадаємо, що в класичній механіці енергія визначається з точністю до сталої. Перехід від релятивістської енергії вільної частинки (3.11) до нерелятивістської границі дозволив визначити цю сталу.

Кінетична енергія релятивістської частинки

$$T = \varepsilon - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - mc^2. \tag{3.14}$$

Рівняння Лагранжа для вільної релятивістської частинки в векторних позначеннях в декартових координатах

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{\upsilon}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{\upsilon}}\right) = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{\upsilon}} = const;$$

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{\upsilon}} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = const.$$

Закони збереження імпульсу та енергії для релятивістської вільної частинки. як і повинно бути, виконуються.

Повернемося до формули (3.7), якою ми визначили контраваріантні компоненти 4-імпульсу та порівняємо $p^i = mcu^i$ з (3.7) та тривимірними імпульсом (3.10) та енергію (3.11). Очевидно, що

$$p^i = mcu^i = \left(\frac{\varepsilon}{c}, \vec{p}\right) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right);$$

$$p_i = mcu_i = \left(\frac{\varepsilon}{c}, -\vec{p}\right) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, -\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right);$$

Просторові компоненти p^i є тривимірним імпульсом, а часова компонента – енергія, поділена на швидкість світла у вакуумі.

Побудуємо скаляр $p^i p_i$:

$$p^i = mcu^i = \left(\frac{\varepsilon}{c}, \vec{p}\right) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right);$$

$$p_i = mcu_i = \left(\frac{\varepsilon}{c}, -\vec{p}\right) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, -\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right); \tag{3.15}$$

$$p^i p_i = m^2 c^2 - inv$$

Квадрат 4-імпульсу є скаляром. З (3.15) знаходимо функцію Гамільтона вільної частинки (енергію, виражену через імпульс)

$$\frac{\varepsilon^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2; \quad \frac{\varepsilon^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2;$$

$$H = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}. \tag{3.16}$$

З формул (3.10) та (3.11) видно, що імпульс та енергія частинки ненульової маси наближаються до нескінченності, якщо швидкість частинки наближається до швидкості світла.

Нехай маса спокою частинки в (3.16) дорівнює нулю $m = 0$. Маємо

$$\varepsilon = cp. \tag{3.17}$$

Це ж співвідношення можна отримати з (3.13), поклавши $\upsilon = c$. Електромагнітні хвилі можна розглядати як потік фотонів – частинок нульової маси, які рухаються зі швидкістю світла. Вони мають імпульс $\vec{p}$ та енергію $\varepsilon = cp$.